Opérateur carré du champ, subordinateurs et processus de Dirichlet

Nicolas Bouleau

OPERATEUR CARRE DU CHAMP, SUBORDINATEURS ET PROCESSUS DE DIRICHLET

Nous faisons quelques remarques et donnons des exemples sur la décomposition de Fukushima et les fonctions qui sont des processus de Dirichlet sur les trajectoires d'un processus de Markov.

1 - Soit X un processus de Markov droit de type Lebesgue. On sait alors (cf [1],[6]) que le domaine étendu DA est une algèbre : $f \in DA \Rightarrow f^2 \in DA$ et la martingale

$$C_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Af(X_s)\, ds$$

vérifie

$$\langle C^f, C^f \rangle_t = \int_0^t (Af^2 - 2f\, Af)(X_s)\, ds. \tag{1}$$

La quantité positive

$$\Gamma(f,f) = Af^2 - 2f\, Af$$

définit l'opérateur carré du champ Γ sur les fonctions de DA.

2 - Dans le cas des espaces de Dirichlet réguliers où X est un processus de Hunt symétrique par rapport à une mesure positive σ-finie m, on peut, sous l'hypothèse d'existence de l'opérateur carré du champ, faire des calculs analogues en prenant pour A le générateur au sens fort dans $L^2(m)$ (cf [1], p160). Si $f \in D_{L^2}A$ on a encore (1) $\mathbb{P}_m$ p.s. et les fonctions $f \in L^2(m)$ telles que

$$2\mathcal{E}(f,f) = \lim_{n\uparrow\infty} \uparrow \frac{1}{t}\, E^m\left\{ \sum_{k=0}^{2^n-1} [f(X_{\frac{(k+1)t}{2^n}}) - f(X_{\frac{kt}{2^n}})]^2 \right\} < +\infty$$

sont les fonctions $f \in D_{L^2}\sqrt{-A}$ où $\sqrt{-A}$ est la racine carrée de l'opérateur auto-adjoint défini non négatif $-A$ sur $L^2(m)$. De telle sorte que si $f \in D_{L^2}A$ on a :

$$2\mathcal{E}(f,f) = 2 < \sqrt{-Af}, \sqrt{-Af} >_m = -2 < f, Af >_m = < m, \Gamma(f,f) >.$$

[$(\sqrt{-A}, D_{L^2}\sqrt{-A})$ est évidemment aussi le générateur au sens fort dans $L^2(m)$ du semi-groupe subordonné par le subordinateur stable unilatéral d'ordre $\frac{1}{2}$].

On a alors la décomposition de Fukushima (cf [3]) :

Soit $f \in D_{L^2}\sqrt{-A}$, $\tilde{f}$ une version quasi-continue de f, on a

$$(2) \qquad \tilde{f}(X_t) - \tilde{f}(X_0) = M_t + A_t$$

où M_t est une fonctionnelle additive martingale locale d'énergie finie et A_t une fonctionnelle additive continue d'énergie nulle. Föllmer [4] a montré que les processus de la forme (2) appelés processus de Dirichlet vérifiaient une formule d'Ito comme les semi-martingales.

3 - Dans le cas général d'un processus droit de type Lebesgue, l'opérateur carré du champ peut être défini sur un domaine plus large que DA , en effet la décomposition de Fukushima s'étend de la façon suivante (cf [2],[5],[8], [7]) :

Soit H l'espace des différences de p-excessives bornées

a) Si $f \in C^1 \circ H$, $f = g \circ u$, g de classe C^1 , $u \in H$, alors

$$\sum_{\tau_n} [f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i})]^2 \longrightarrow \int_0^t g'^2 \circ u\,(X_s)\, d < (C^u)^c, C^u)^c >_s$$

$$+ \sum_{0 < s \leq t} [\Delta(f \circ X)_s]^2$$

où $(C^u)^c$ est la partie martingale continue de la semi-martingale $u \circ X$ et où la limite est en probabilité lorsque le pas du partage τ_n de $[0,t]$ tend vers zéro.

b) Si de plus u est régulière [ie. $(u \circ X)_- = u \circ (X_-)$] alors f est un processus de Dirichlet sur les trajectoires de X :

$$(3) \qquad f(X_t) - f(X_0) = A_t + M_t$$

$$\text{où} \qquad M_t = \int_0^t g' \circ u(X_s)\, d(C^u)^c_s + (\overset{c}{S} F)_t$$

est une fonctionnelle additive martingale localement de carré intégrable ($\overset{c}{S} F$ est la somme compensée associée à $F(x,y) = f(y) - f(x)$ cf [2],[5]), et où A_t est une fonctionnelle additive continue telle que :

$$\sum_{\mathcal{T}_n} (A_{t_{i+1}} - A_{t_i})^2 \to 0$$

en probabilité lorsque le pas du partage $\mathcal{T}_n$ tend vers zéro.

On peut alors dans le cas b) définir $\Gamma(f,f)$ par la densité de Motoo de $< M,M >_t$ c'est-à-dire par

(4) $$\Gamma(f,f) = (g' \circ u)^2 \, \gamma(u,u) + NF^2$$

où N est le noyau de Lévy du processus X (par rapport à la fonctionnelle additive canonique identique à t) et où $\gamma(u,u)$ est la densité de Motoo de la fonctionnelle additive $< (C^u)^c,(C^u)^c >_t$.

La définition précise la plus générale du domaine de l'opérateur carré du champ dépend donc de la possibilité d'une décomposition telle que (3).

4 - Tout se simplifie assez si X est sans diffusion au quel cas il est naturel d'après ce qui précède de définir Γ par :

(5) $$\Gamma(f,f)(x) = \int (f(y) - f(x))^2 \, N(x,dy)$$

et son domaine par une condition de finitude, par exemple :

(6) $$U_p(\Gamma(f,f)) \text{ borné pour } p > 0 \qquad (U_p \text{ résolvante de } X)$$

Notons alors que $D\Gamma$ et $D\sqrt{-A}$ (au sens du domaine étendu du processus subordonné X_Y du processus X par le subordinateur stable unilatéral d'ordre $\frac{1}{2}$, cf [9]) sont deux espaces vectoriels :

i) contenant les différences de p-excessives bornées pour X

ii) inf-stables.

(La propriété i) pour $D\Gamma$ étant montrée en [5], les propriétés i) et ii) pour $D\sqrt{-A}$ étant démontrées en [9],[10]).

Cependant $D\Gamma$ fait intervenir la quantité :

$$\lim_{t \downarrow 0} \left[\frac{P_t - I}{t} (f(.) - f(x))^2 \right](x)$$

alors que $D\sqrt{-A}$ fait intervenir la quantité

$$\int_0^\infty (P_t f - f) \frac{dt}{t^{3/2}}$$

et ces quantités ne sont pas en général comparables.

5 – Dans le cas des subordinateurs eux-mêmes, la définition (5), s'écrit

$$\Gamma(f,f)(x) = \int_0^\infty (f(x+y) - f(x))^2 \, d\nu(y)$$

où ν est la mesure de Lévy. Comme ν intègre $x \to x \wedge 1$, les fonctions bornées höldériennes d'ordre $\frac{1}{2}$ sont dans $D\Gamma$, et on peut montrer que si ν intègre $x \to x^\lambda \wedge 1$ pour tout $\lambda : 0 < \beta < \lambda \leqslant 1$, alors les fonctions bornées höldériennes d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ pour $\alpha > \beta$ sont dans $D\Gamma$ et sont des processus de Dirichlet sur les trajectoires. Le cas des stables unilatéraux d'ordre α permet un résultat plus précis : on note $V^{(\alpha)}$ le noyau potentiel du subordinateur $Y^{(\alpha)}$ stable unilatéral d'ordre $\alpha \in]0,1[$.

Proposition 1 :

Si $0 < \frac{\alpha}{2} < \beta < \alpha \leqslant 1$ et si h bornée à support compact ne vérifie pas une condition de Hölder d'ordre $\beta - \frac{\alpha}{2}$ dans L^1, alors $u = V^{(\frac{\alpha}{2})}h$ est höldérienne d'ordre $\frac{\alpha}{2}$, appartient à $D\Gamma^{(\beta)}$, est un processus de Dirichlet sur les trajectoires de $Y^{(\beta)}$ mais n'est pas une semi-martingale sur les trajectoires de $Y^{(\beta)}$.

Démonstration :

L'expression explicite de $V^{(\alpha)}$ permet de voir que

$$V^{(\beta)} V^{(\alpha-\beta)} = V^{(\alpha)} \qquad \text{si} \quad 0 < \beta < \alpha \leqslant 1$$

(propriété des puissances fractionnaires). Utilisant alors le fait que $Y^{(\beta)}$ est en dualité avec son homologue décroissant pour la mesure de Lebesgue avec le noyau-fonction

$$g_\beta(y-x)$$

où g_β est la densité de $V^{(\beta)}$, on montre grâce à la représentation de

Revuz [11] que si u, définie comme dans l'énoncé, était une semi-martingale sur les trajectoires de $Y^{(\beta)}$ on aurait

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} g_\beta(y-x)\, d\eta(y)$$

pour une mesure η et la formule d'itération des noyaux potentiels impliquerait que

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} g_{\beta-\frac{\alpha}{2}}(y-x)\, d\eta(y)$$

ce qui entraînerait que h vérifie une condition de Hölder d'ordre $\beta - \frac{\alpha}{2}$ dans L^1.

Nous avons vu que les fonctions höldériennes d'ordre $\frac{1}{2}$ sont dans les domaines de l'opérateur carré du champ de tous les subordinateurs or on sait que les trajectoires browniennes ne sont höldériennes d'ordre $\frac{1}{2}$ sur aucun intervalle, le résultat suivant est donc une amélioration du précédent.

Proposition 2 :

Soit X une semi-martingale dans H^2 sur $(\Omega_1, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}_1)$ et Y un subordinateur sans partie continue sur $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$ de filtration naturelle complétée $(\mathcal{G}_t)$.
Alors pour $\mathbb{P}_1$ presque tout ω_1 fixé :

i) *l'application $t \to X_t(\omega_1)$ est dans $D\Gamma_Y$*

ii) *le processus $X_{Y_t}(\omega_1)$ est un processus de Dirichlet relativement à $(\mathcal{G}_t, \mathbb{P}_2)$.*

Nous disons qu'un processus est un processus de Dirichlet (en un sens légèrement plus large qu'en [4]) s'il est la somme d'une martingale de carré intégrable et d'un processus Z_t adapté de carré intégrable tel que pour tout t , et pour toute suite τ_n de partages de $[0,t]$ dont le pas tend vers zéro, il existe une sous-suite $\tau_{n'}$ telle que

$$\lim_{n'} \mathbb{E} \sum_{\tau_{n'}} (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})^2 = 0 .$$

Démonstration :

i) Ecrivons $X = N + B$ la décomposition canonique de la semi-martingale spéciale X , avec $B_0 = 0$

et $\mathbb{E}_1 [N_\infty^2 + (\int_0^\infty |dB_s|)^2] = \|X\|_{H^2}^2 < \infty$

Posons $H_a = 1_{]Y_s, Y_s+y]}(a)$, on a

$$\mathbb{E}_1(X_{Y_s+y} - X_{Y_s})^2 = \mathbb{E}_1(H \cdot X)_\infty^2$$

$$\leq 2\,\mathbb{E}_1\left[\int_{a\in]Y_s, Y_s+y]} d<N,N>_a + \int_0^\infty |dB| \cdot \int_{a\in]Y_s, Y_s+y]} |dB_a|\right]$$

d'où par le théorème de Fubini :

$$\mathbb{E}_1\,\mathbb{E}_2 \int_0^t\int_0^\infty (X_{Y_s+y} - X_{Y_s})^2\, d\nu(y) ds$$

$$\leq 2\,\mathbb{E}_1\,\mathbb{E}_2\,[\int_0^t\int_0^\infty (<N,N>_{Y_s+y} - <N,N>_{Y_s})\, d\nu(y)\, ds$$

$$+ \bar{\bar{B}}_\infty \int_0^t\int_0^\infty (\bar{\bar{B}}_{Y_s+y} - \bar{\bar{B}}_{Y_s})\, d\nu(y)\, ds]$$

en posant $\bar{\bar{B}}_t = \int_0^t |dB_s|$, d'où

$$\leq 2\mathbb{E}_1\mathbb{E}_2\,[\sum_{0<s\leq t} (<N,N>_{Y_s} - <N,N>_{Y_{s-}}) + \bar{\bar{B}}_\infty \sum_{0<s\leq t} (\bar{\bar{B}}_{Y_s} - \bar{\bar{B}}_{Y_{s-}})]$$

$$\leq 2\mathbb{E}_1\mathbb{E}_2\,[<N,N>_\infty + \bar{\bar{B}}_\infty^2] = 2\,\|X\|_{H^2}^2.$$

Il en résulte que pour $\mathbb{P}_1$ presque tout ω_1

$$\mathbb{E}_2 \int_0^\infty\int_0^\infty (X_{Y_s+y} - X_{Y_s})^2\, d\nu(y)\, ds < +\infty$$ d'où le i).

ii) Il est clair, B étant différence de deux processus croissants, que pour ω_1 fixé, $s \to B_s(\omega_1)$ est dans le domaine étendu de Y (cf [9]). Il suffit donc de démontrer le ii) lorsque X est une martingale de carré intégrable.

a) Posons d'après la proposition 5 de [9]

$$A_t(a) = 1_{]Y_0,Y_t]}(a) = \sum_{0<s\leqslant t} 1_{]Y_{s-},Y_s]}(a).$$

Le processus $A_t(a)$ a pour $(\mathcal{G}_t, \mathbb{P}_2)$-projection prévisible duale

$$A^p_t(a) = \int_0^t \int_{y\in\mathbb{R}^*_+} 1_{]Y_s,Y_s+y]}(a)\, d\nu(y)\, ds$$

et donc

(7) $$M_t(a) = 1_{]Y_0,Y_t]}(a) - \int_0^t \int_{y\in\mathbb{R}^*_+} 1_{]Y_s,Y_s+y]}(a)\, d\nu(y)\, ds$$

est une $(\mathcal{G}_t, \mathbb{P}_2)$-martingale.

Le potentiel du processus croissant $A_t(a)$

$$\mathbb{E}_2\,[A_\infty(a)\,|\,\mathcal{G}_t] - A_t(a) = \mathbb{E}_2\,[A^p_t(a)\,|\,\mathcal{G}_t] - A^p_t(a)$$

est borné en module par 2 et il résulte de la formule de l'énergie ([12] p.173) que

$$\mathbb{E}_2\,[(A^p_\infty(a))^2] \leqslant 4$$

d'où

$$\mathbb{E}_2\,[(M_t(a))^2] \leqslant 5.$$

On en déduit que pour $\mathbb{P}_2$-presque tout ω_2 fixé, le processus déterministe $a \to A^p_t(a)$ est intégrable pour dX_a, et que

$$\mathbb{E}_1\,\mathbb{E}_2\,\left(\int_0^\infty A^p_t(a)\, dX_a\right)^2 = \mathbb{E}_1\,\mathbb{E}_2 \int_0^\infty (A^p_t(a))^2\, d\langle X,X\rangle_a \leqslant 4\,\|X\|^2_{H^2}$$

et de même pour $a \to M_t(a)$ avec

$$\mathbb{E}_1\,\mathbb{E}_2\,\left(\int M_t(a)\, dX_a\right)^2 \leqslant 5\,\|X\|^2_{H^2}.$$

Posons $\tilde{A}_t = \int_0^\infty A^p_t(a)\, dX_a$ et $\tilde{M}_t = \int_0^\infty M_t(a)\, dX_a$, on a en intégrant la relation (7) par rapport à dX_a :

(8) $$X_{Y_t} = X_{Y_0} + \tilde{M}_t + \tilde{A}_t \qquad \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2 \quad \text{p.s.}$$

b) D'après sa définition il est aisé de voir qu'il existe une $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$-version de la variable $\tilde{M}_t$ qui est $\mathcal{F}_\infty \times \mathcal{G}_t$-mesurable. Il en résulte que $\tilde{M}_t$ est une $(\mathcal{F}_\infty \times \mathcal{G}_t, \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2)$-martingale. En effet, soit $F \in \mathcal{F}_\infty$ et $G \in \mathcal{G}_s$, d'après le théorème de Fubini dans l'intégrale stochastique ([13] thm 5.44.) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_1\, \mathbb{E}_2\, [\tilde{M}_t\, 1_F\, 1_G] &= \mathbb{E}_1\, \{1_F\, \mathbb{E}_2[1_G \int_0^\infty M_t(a)\, dX_a]\} \\
&= \mathbb{E}_1\, \{1_F \int_0^\infty \mathbb{E}_2\, [1_G\, M_t(a)]\, d\, X_a]\} \\
&= \mathbb{E}_1\, \{1_F \int_0^\infty \mathbb{E}_2\, [1_G\, M_s(a)]\, d\, X_a]\} \\
&= \mathbb{E}_1\, \mathbb{E}_2\, [1_F\, 1_G\, \tilde{M}_s].
\end{aligned}$$

En conséquence, il existe une $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ - version de $\tilde{M}_t$ qui est une $((\mathcal{F}_\infty \times \mathcal{G}_t)_+ , \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2)$ - martingale càdlàg.

c) Il résulte de (8) qu'il existe $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ - version $(\mathcal{F}_\infty \times \mathcal{G}_t)_+$-adaptée càdlàg du processus $\tilde{A}_t$.
Or le processus $\tilde{A}_t$ est de variation quadratique nulle. En effet, si (t_i) est un partage de $[0,t]$

$$\mathbb{E}_1\, \mathbb{E}_2\, \sum_i (\tilde{A}_{t_{i+1}} - \tilde{A}_{t_i})^2 = \mathbb{E}_1 \int_0^\infty [\mathbb{E}_2\, \sum_i (A^p_{t_{i+1}}(a) - A^p_{t_i}(a))^2]\, d<X,X>_a .$$

Or $\mathbb{E}_2\, \sum_i (A^p_{t_{i+1}}(a) - A^p_{t_i}(a))^2$ tend vers zéro en restant majoré par $\mathbb{E}_2\, (A^p_\infty(a))^2 \leqslant 4$.

Comme $\tilde{A}_t$ est càdlàg, il en résulte que $\tilde{A}_t$ est continu donc $(\mathcal{F}_\infty \times \mathcal{G}_t)_+$ prévisible. Il résulte alors du lemme 7 page 413 de [12] que $\tilde{A}_t$ est $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ - indistinguable d'un processus $\mathcal{F}_\infty \times \mathcal{G}_t$ - prévisible donc $\mathcal{F}_\infty \times \mathcal{G}_t$ - adapté.

d) Finalement la décomposition (8) peut s'écrire

$$X_{Y_t} = X_{Y_0} + \tilde{M}_t + \tilde{A}_t$$

où $\tilde{A}_t$ est un processus continu $(\mathcal{F}_\infty \times \mathcal{G}_t)$ - adapté de variation quadratique nulle, et où $\tilde{M}_t$ est une $((\mathcal{F}_\infty \times \mathcal{G}_t)_+, \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2)$-martingale

càdlàg $(\mathcal{F}_\infty \times \mathcal{G}_t)$ - adaptée donc une $(\mathcal{F}_\infty \times \mathcal{G}_t)$ - martingale.
Il en résulte que

$$\forall s < t \qquad \forall G \in \mathcal{G}_s \qquad \mathbb{E}_2\,[\tilde{M}_t\, 1_G] = \mathbb{E}_2\,[\tilde{M}_s\, 1_G] \qquad \mathbb{P}_1 \text{ ps.}$$

donc pour $\mathbb{P}_1$-presque tout ω_1 le processus $\tilde{M}_t$ est càdlàg $\mathcal{G}_t$-adapté et est une $(\mathcal{G}_t, \mathbb{P}_2)$ martingale le long des rationnels donc une $(\mathcal{G}_t, \mathbb{P}_2)$ martingale.

En conclusion pour $\mathbb{P}_1$-presque tout ω_1, X_{Y_t} est un $(\mathcal{G}_t, \mathbb{P}_2)$ processus de Dirichlet.

N. BOULEAU
E.N.P.C.
28, rue des Saints-Pères
75007 PARIS

BIBLIOGRAPHIE

[1] P.A. MEYER : Démonstration probabiliste de certaines inégalités de Littlewood-Paley
Sém. de Prob. X Lect. Notes in Math. 511 Springer (1976).

[2] S.H. WATANABE : On discontinous additive functional and Levy measures of Markov processes
Japanese J. of Math. 34 (1964) 53-79.

[3] M. FUKUSHIMA : Dirichlet forms and Markov processes
North Holland (1980).

[4] H. FÖLLMER : Dirichlet processes in Stochastic integrals
Lect. Notes in Math. 851, Springer (1981).

[5] P.A. MEYER : Intégrales stochastiques
Sém. de Prob. I. Lect. Notes in Math. 39 Springer (1967).

[6] N. BOULEAU : Propriétés d'invariance du domaine du générateur infinitésimal étendu d'un processus de Markov
Sém. de Prob. XV Lect. Notes in Math. 851 Springer (1981).

[7] M. YOR : Une remarque sur les formes de Dirichlet et les semi-martingales
Sémi. de th. du Potentiel n°2 Lect. Notes in Math. Springer

[8] P.A. MEYER : Un cours sur les intégrales stochastiques chapitre VI
Sémi. Prob. X Lect. Notes in Math. 511 Springer (1976).

[9] N. BOULEAU : Quelques résultats probabilistes sur la subordination au sens de Bochner
(Ce volume).

[10] F. HIRSCH : Générateur étendu et subordination au sens de Bochner

(Ce volume)

[11] D. REVUZ : Mesures associées aux fonctionnelles additives de Markov

Transactions of the AMS vol 148 (1970).

[12] C.DELLACHERIE & P.A. MEYER :

Probabilités et potentiel, théorie des Martingales

Hermann (1980).

[13] J. JACOD : Calcul stochastique et Problèmes de Martingales

Lect. Notes in Math. 714
Springer (1979).
